



TITLE:

# 三次のジェット・フラップ理論 (流体方程式における特異摂動法とその応用)

AUTHOR(S):

徳田, 尚之

---

CITATION:

徳田, 尚之. 三次のジェット・フラップ理論 (流体方程式における特異摂動法とその応用). 数理解析研究所講究録 1973, 187: 72-89

ISSUE DATE:

1973-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107209>

RIGHT:

# 三次元のジェット・フラップ

## 理論

ケンブリッジ大学応用数学部<sup>\*</sup>

徳田 尚之

### § 1. 序

航空機は最近急速に大型化しているが、それに伴い、着陸時の滑走距離を延び、殊に最近公害問題として、大きくローズ・アップされてくる騒音の問題とも絡み、新空港建設に際しての敷地問題は、成田空港更にはロンドンのユーストン空港等に見られる様に、大変深刻な社会問題へと発展している。短距離/垂直着陸可能な航空機の出現が殊に最近、望まれているのは、この、背景による所が大きい。この種の航空機の基礎となる高揚力装置として注目を浴びているものの一つが、ジェット・フラップである。翼の後端部から、ジェットを高速で一様な蒸気層状に噴き出させ、それにより形成するジェット・シートにより、今まで使用されている機械的なフラップの役目の代用とさせる事から、このジェット・フ

<sup>\*</sup> 現住所：東京都文京区関口 1-24-2, 604号

フラップという名称がつけられている。然し、機械的フラップに較べて、ジェット・フラップは次の様な特徴をもちている。

1. 高速ジェットを噴き出す事により、翼上の境界層のはがれを防ぐ。。これは、翼表面での摩擦の厚、減速され、エネルギーを失い、はがれかけている状態の流体にエネルギーを与え、剥離を防ぐ<sup>(はがれ)</sup>事<sup>(ハネリ)</sup>の意味で、ジェット・フラップは境界層コントロールの一種と考えて良い。

2. 翼の後部に形成するジェット・シートの上、下面内には圧力差(ジェットの運動量と曲率の爲生ずる遠心力による)が主で、従ってジェット・シート面自体が、翼面と同様に、揚力面となる。ジェットは、無限速まで原則として伸びるので、この揚力面も無限速まで伸びる事になる。

3. 噴き出すジェットの運動量は、全く其推力としては、まったく回収される。

この問題の二次元の詳細な解析は、Spence (1956, 1961) により与えられている。Spence は、流体は非粘性とし、落肉ジェットを仮定して、落翼展周流を用いている。これらの制限にも関わらず、Spence の解は、ジェットの吹き出し角で  $60^\circ$  という大きな角度でも、実験値とよく一致しており、この Spence の仮定が、大変物理的意義をもち、この事を示している。この Spence の理論の outline は、§2 に述べる。

ジェット・フラップを使う翼では、ジェット・シートや揚力面と成る事からも解る様に、実際の応用問題では、その三次元の解析は、大変重要なファクターに成る。一般に、ジェットの内部が一番難かしい問題は、そのジェットの形状を定める事であるが、このジェット・フラップの問題では更に、この形状が決まり、この初めて揚力面上での渦層の強さを定まり、これが全体の流れに影響を及ぼすのであるから、三次元においては、その解析方法は、益々難かしく成る。例えば、Maskell & Spence (1960) は、初めてこの三次元の問題を扱ったが、そこで導く揚力面理論を用いて、解析的に解こうとした為、downwash を <sup>評価するの</sup> 内挿法等という、理論的には疑わしい方法を用いている。Kerney (1971) は、特異摂動法を用いて、この三次元の問題を解こうとしているが、この問題では一番重要と思われる外部領域でのジェット・シートの影響を無視しているというミスと犯している。

この論文の一番の特徴は、このジェットの形状は、実は外部領域では、内部領域の流れによ、こままる特異点(又は線)の強さによ、こままる事と示した事である。この事実は、割りに簡単に物理的考察により見破る事が出来る事を、§4に示す。この結果全領域で一様に成り立つ三次元の漸近解が、複雑な微積分方程式と解く必要もなく、簡潔に求められた。

## §2. 二次元の Spence の理論

下の図1に、二次元ジェット・フラップの断面図及びその座標系を図示してある。勿論

これは、図2に示す三次元翼の横断面図と考えることも良い。

良く知られている様な粘性が無く、縮まぬ流体の式にはポテンシャル中が存在し、それは Laplace の式で

満足する。ここでジェットが筋肉であり、翼及びジェットによる影響は一樣流に較べて一樣に小さいとして落翼尾用を用いると、二次元のジェット・フラップを支配する式及び境界条件は次の様に表わされる。

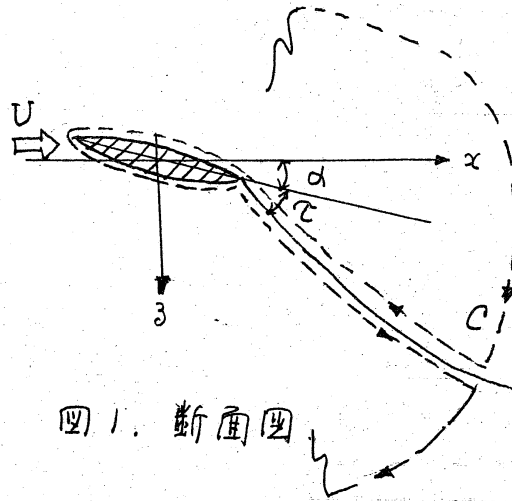
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \alpha, \quad -\frac{c}{2} < x < \frac{c}{2}, \quad z = 0 \quad (2.2)$$

$$\omega = \alpha + \gamma, \quad x = \frac{c}{2}, \quad z = 0 \quad (2.3)$$

$$\Gamma = \frac{c}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} c_j, \quad x > \frac{c}{2}, \quad z = 0. \quad (2.4)$$

ここで  $\alpha$  は翼の迎え角、 $\gamma$  は、迎え角を基準にして測ったジェットの噴出角である。簡単に言う為翼の反りは与えず、Laplace の式 (2.1) を満たすとする。図の1の中で、複素平面  $z = x + iz$  と考えると、複素速



度  $\phi = u - i\omega$  は, コーシーの定理により次の様に表わせる。

$$\phi = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi(z')}{z - z'} dz'$$

ここで積分路として, 翼及びジェット・シートの上, 下面に沿って無限遠の下流点に達し, その点の半径を  $r$ , 2 点間の周曲線  $C$  (図. 1 参) を選べば, その積分値としては, 翼とジェット上, 下面部の  $u$  成分のとび (jump) のみが寄与する事になり, 殊にその虚数部を取ると次の式を得る。

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\Gamma(x')}{x - x'} dx' \quad (2.5)$$

ここで  $\Gamma$  は, (2.4) 式の  $\Gamma$  と同様渦度の強さを表わし, これは良く知られている様に, 速度  $u$  のとびで定義される (今井 1970, 1991)。従って, ニ次元のジェット・フラップの解は, 境界条件 (2.2) から (2.4) を満たす様な  $\Gamma$  の分布を求めれば良き事を解る。

Spence はまず (2.5) 式と Carleman の反転公式を用いて反転し,  $\omega$  は  $-c/2$  から  $c/2$  の間には既知であるのでその積分を行った。こうしてから, (2.5) 式と  $c/2$  から  $\infty$  の範囲での  $\omega$  とその微分  $\frac{d\omega}{dx}$  とを含む微積分方程式に変換して, Fourier 展開更には, ジェット係数  $G_j$  を小として漸近展開を行って, Mellin 変換を用いて解を求めた。Spence によるジェット・フラップ翼の揚力係数は次の式で与えられる。

$$\frac{\partial C_L^{(2)}}{\partial \alpha} = 2\pi \left[ 1 - \frac{G_1'}{4\pi} \left( 1 + \frac{G_1}{4\pi} \right) \left( \log \frac{G_1}{4\beta} - 1 \right) + O(G_1^2) \right] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial C_2^{(2)}}{\partial \varepsilon} = 2\sqrt{\pi}G \left[ 1 - \frac{G'}{8\sqrt{2}} \log \frac{G'}{4\beta} - \frac{G'^2}{128\pi^2} \left\{ \left( \log \frac{G'}{4\beta} \right)^2 + 4 \log \frac{G'}{4\beta} - 4 \right\} + \dots \right] \quad (2.7)$$

ここで  $\beta = 4e^{\gamma}$ ,  $\gamma$  は Euler 定数 0.5772 であり,  $G$  はジェット の運動量係数である。添字 <sup>(2)</sup> は, この論文では二次の場合を示す。尚 Spence の解の詳細は, 原論文 (Spence 1956, 1961) を参照されたい。

### §3. 揚力面理論による三次元ジェット・フラップ解法

解析を出来るだけ簡単にする為、

二次の場合と同様に, 三次元

でも, 及びの図 1 かを前後

並びに左右に对称な翼を考

る (図 2 を参照)。二次元の

Spence の理論で実証されてい

る落肉ジェットの仮定に基づく

落翼展開理論と, 三次元の場合

も用いる。三次元のジェット・フラップを支配する式 (2.8) の

二次元の場合と同様に次の如く与えられる。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\omega(x, y, 0) = \alpha, \quad -\frac{c}{2A} < x < \frac{c}{2A} \quad (3.2)$$

$$\omega(x, y, 0) = \alpha + \varepsilon, \quad x = \frac{c}{2A} \quad (3.3)$$

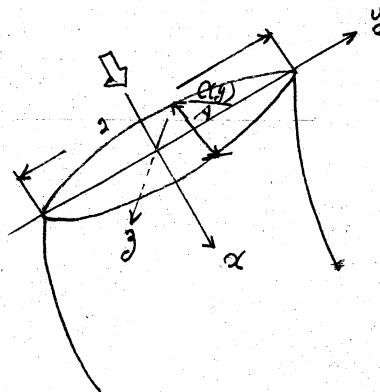


図 2. 三次元翼

$$\Gamma(x, y) = -\frac{cG}{2A} \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, y, 0), \quad x > \frac{c}{2A} \quad (3.4)$$

ジェット・シート上の条件(3.4)を求めるのに際し、渦核の巻  
き上がりによる翼巾方向に生じるジェットの運動量の影響は、  
こゝで無視している。この点<sup>レ</sup>については詳しく徳田(1971)に  
討議してある。この種の三次元の揚力面理論は、二次元の場  
合と同じ積分方程式の型に導く事が出来る。

(3.1)式の中と同様に、速度成分  $u$  を当然 Laplace の方程式  
 $\nabla^2 u = 0$  に満足するから、Green の公式表示を用いた次の  
様に一般的に表現出来る(今井 1970, 5310-ジ)。

$$u(x, y, z) = \iint_S \left( u \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{1}{4\pi r} dS \quad (3.5)$$

この式は任意の閉曲面  $S$  の外部で成り立つ。こゝでの  $n$  は面  
 $S$  に垂直なベクトルであり、 $r$  は積分点と  $u$  を評価しよう  
としている  $(x, y, z)$  点間の距離である。今この閉曲面  $S$  とし、  
翼及びジェット・シートの上、下面を含むものを考えたとす  
と、(3.5)式は翼及びジェット・シート面の上、下での  $u$  の値の  
みからコントリビューションを受ける事が解る。こゝで  $\omega$  が連  
続である事は、 $\frac{\partial u}{\partial n}$  が連続である事を意味する事に注意され  
る。翼理論では、翼、ジェットと共に  $z=0$  の面に位置して  
いると見做して良い事から、(3.5)式は次の様に変形出来る。

$$u(x, y, z) = \iint_{S(z=0)} \Delta u \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi r} \right) dS = \iint_{W \cup J} \Gamma(x', y') \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi r} \right) dx' dy' \quad (3.6)$$

式(3.6)は、揚力面を作る三次元問題では、速度  $u$  は、揚力面



どの  $u$  のと  $v$  (即ち渦層の強さ) とその強さとし, 主流方向と垂直な方向に軸をと, た二重わき出しにより求めらる事と示している。この事から, 揚力面上で上向きに二重わき出し(doublet)と渦層の解は, 数学的に同等である事が解る。この  $u$  の式から境界条件を満たすのにより便利なる下向きの速度成分  $w$  に関する式を導く事は容易であり, 次の様なる良く知られた揚力面の式を得らる。

$$w(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\Gamma(x', y')}{y - y'} \left(1 - \frac{y}{x - x'}\right) dx' dy' \quad (3.8)$$

$$r = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$$

三次元の境界条件 (3.2) から (3.4) を満たす  $\Gamma$  の分布を求めねばなる事になる。式 (3.8) は然らぬから, 強い簡便性をもつ二重微積分方程式となり, 二次元の Spence 理論の様なる解析解を求める事は殆んど絶望的である。(3.8) の数値解が唯一の方法と思われれる。これには色々なバリエーションが考えらるが, 基本的には, 翼及びジェットと小さなブロックに細分し, 各ブロック内では渦層の強さを一定と考之, 他のブロックへのそれぞれのブロックの影響を加之, その結果与えらる境界条件を満たす様に各ブロックの渦層の強さを決めて行く方法をとる。このジェット・フラップの問題については, Das (1965) か Maltchapp の数値解法に基づき, 数値解を求めらるが, 本論文の計算

結果に較べると、莫大の計算の手間<sup>その理由は</sup>の割りには、最終結果は精度的にも余り思わしく無い様である。普通の三次元翼問題と違い、揚力面がジェット・モートの厚翼の後方無限遠まで伸びるので、同じ精度を得るには相当このブローりの数を増やす必要がある筈と思われる。前述した Maskell & Spence (1960) は、 $w$  が  $y$  に依る  $w$  の翼中方向の循環が楕円形に変わるといふ特殊な場合について考えたが、それでも尚又  $w$  の変化を評価するのに、既知量である  $w(0, y)$  と  $w(\infty, y)$  の間は内挿法によつて定めるといふ、大強引な方法によらざるを得なかった。但し、Maskell & Spence (1960) の楕円翼の場合の最終結果は、漸近的には本論文の解と一致しており、これは諸等如何に注意深く問題の物理現象に忠実にその内挿法を選んだかという事を示している。次章では、もっと他の観点からこの問題を眺め、系統立ってしかも数学的にも厳密な解と求め得る方法を示唆する一つの物理的考察方法を示す。

#### §4. ジェット・フラップの三次元問題の物理的解釈について

§3 で述べた様に、三次元ジェット・フラップの問題を、積分方程式の型に帰着させるのは容易であるが、二次元の様に

解析解を求める事は困難である。前にも述べた様に、ジェット・フラップの問題とその取扱いが一番困難であるのは、ジェットの形状と流れの相互干渉の問題であるが、次々示す物理解釈によれば、その取扱方法、従って解析方法が大変容易になる事を示す。下の図3を参照されると便利である。

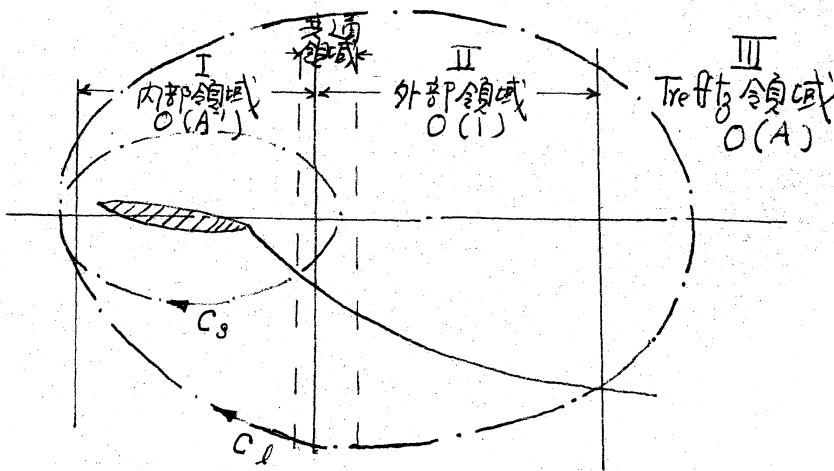


図3. 流線の基本的構造

今図2又図3に示す様な翼中の長さのオーダーで、翼弦が  $O(1/A)$  である<sup>(5)</sup>様翼を考えよう。勿論高速のジェットが翼の後端から吹き出ている。今我々が翼から  $O(1/A)$  の内部領域(I)に居ると仮定しよう。するとこの目撃者には、 $A$  が大きく居ると、この翼そのものが無限遠にまで伸びているとしか見えな<sup>\*</sup>い。即ちこの翼全体が二次元翼としか見えな領域が存在する

<sup>\*</sup> 但し翼の両端の近くでは、幾ら  $A$  が大きくても翼の先が切りこま<sup>\*</sup>い、二次元性が失われる領域が必ず存在する。

。即ちこの領域(I)では、少く其第一近似では、翼の三次性の影響を考へなくとも、Spenceの二次性の解が使える事が解る。

次に翼巾と同じオーダー(即ち $O(1)$ )の距離だけ翼から離れた領域に居る場合を考えて見よう。この目撃者から見た翼はその長さ $O(1/A)$ の如く零に近づく事になるので、翼は線の様にしか見えな。この線が消えれば、この外部領域の流れは一樣流となる筈である。即ちこの外部領域において生じているこの一樣流からの乱れは、実はこの線に集中している特異性の強さによつて決まるものである<sup>\*\*</sup>。ジェットは当然流れに沿つて流れる事には注目すると、この論文では一番重要な次の事実が確立される；即ち外部領域(II)でのジェットの形状、即ちジェット面上での渦層の強さは、内部領域でのこの特異線(普通Prandtlの揚力線と呼ばれる)上の特異性の強さによつて決まる。従つて、内部領域における特異性(湧き出し、二重湧き出し、...、渦糸、...)の強さを解ければ、この問題で最も広い領域を持つ外部領域の揚力面(ジェット・シート面)の渦層の強さが決まり、従つて全領域の流れが決定出来る。

<sup>\*\*</sup>この事象は、もっとよく知られてゐる粘性流中のOseenlet, <sup>(の概念)</sup>Stokesletと対比して考えると、もっと明解に理解出来ると思ふ。

この領域より、と遠く  $O(A)$  の距離翼から離れた点を考えると、 $x$  軸の方向にはもう流れの状態が変化しないうちと、形式的には [I] の内部領域の流れと良く似て二次元流れの領域が存在する。但しこの面は主流に対して垂直な面が (I) の面とは  $90^\circ$  ずれている。これは Toffin の領域 (III) と呼ばれ、翼に効く揚力、抵抗の計算に便利である。

この問題で循環を考へる <sup>二</sup>通りの閉曲線  $C_1$  と  $C_2$  が必要になる事に注意された。図 3 に示す様に  $C_1$  は内部領域 (I) を含むもので、これは内部領域で生じる非変性の強さを計算するのに必要である。一方  $C_2$  はこれよりも、と大きく、内、外部領域 (I) と (II) を含み、Toffin 域 (III) と連するもので、これは翼の揚力等の計算に便利である。こういふ二通りの閉曲線が必要になるのは、揚力面となるジェットが無限遠まで伸びている事から明らかであろう。

この章で述べた物理解釈を用いて、この複雑なジェット・フリップの問題を、簡潔に解く方法を次章で示そう。

### 5.5. 漸近解の概要

内部領域 (I) の解析には、次の様な内部変数を導入する。

$$X = Ax, \quad Y = y, \quad Z = Az \quad (5.1)$$

一方外部領域(II)における外部変数は元のまゝの変数を用いる。

$$x = x, y = y, z = z \quad (5.2)$$

内部リミットは,  $X, Y, Z$  を一定に保ちながら  $A \rightarrow \infty$  にし, 一方外部リミットは,  $x, y, z$  を一定に保ちながら  $A \rightarrow \infty$  にする。  
 (5.1) 及び (5.2) の内部及び外部変数を (3.1) ~ (3.4) 式に代入して, 各々のリミットを取り, それに基づき内部解及び外部解を求める。内部解は外部の境界条件を満足出ます, 又逆に外部解は内部の境界条件を満足せず, 従, ここからのローカルな解は未知係数と常に含んでいる。これを中間の交通領域でも, この両者を接続させる事によりすべて決定出来る。そこでその様にして決まる結果のみと下向きに速度成分  $W$  (内部) と  $w$  (外部) について記す。

### 内部解

$$W = W_1 + W_2 + \dots \quad (5.3)$$

$$W_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\infty} \frac{\Gamma_1(X')}{X-X'} dX' \quad (5.4)$$

$$W_2 = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\frac{c}{2}}^{\infty} \frac{\Gamma_2(X')}{X-X'} dX' \quad (5.5)$$

$$c, c', r_1 = \int_{-\frac{c}{2}}^{\infty} \Gamma_1 dX = \frac{c}{2} C_1^{(2)} = \frac{c}{2} \left\{ \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial a} a + \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial c} c \right\} \quad (5.6)$$

$$r_2 = \int_{-\frac{c}{2}}^{\infty} \Gamma_2 dX = -\frac{c}{2} d_{12} \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial a} \quad (r_1, r_2, \dots \text{は内部解は } c \text{ 決まる } c' \text{ がある}) \quad (5.7)$$

尚、次の揚力係数は Spence に より式 (2.6), (2.7) に より与えらる。又  $\alpha_{i2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2} c_L^{(2)}}{y-y'} dy$  であり、誘導上向きと全体的下向きに効く迎角である。

### 外部解

$$W = W_1 + W_2 + W_3 (= W_{3l} + W_{3d} + W_{3j}) + \dots \quad (5.8)$$

$$W_1 \equiv 0 \quad (5.9)$$

$$W_2 = \frac{1}{2\pi A} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \frac{l_2}{y-y'} \left\{ 1 + \frac{\{x^2 + (y-y')^2\}^{1/2}}{x} \right\} dy' \quad (5.10)$$

$$W_{3l} = \frac{1}{4\pi A^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \frac{l_3}{y-y'} \left\{ 1 + \frac{\{x^2 + (y-y')^2\}^{1/2}}{x} \right\} dy' \quad (5.11)$$

$$W_{3d} = \frac{1}{4\pi A^2 x^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \delta_3 \frac{y-y'}{\{x^2 + (y-y')^2\}^{1/2}} dy' \quad (5.12)$$

$$W_{3j} = \frac{1}{4\pi A^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \int_{x_m}^{\infty} \frac{r_{d3}'}{y-y'} \left[ 1 - \frac{x}{x-x'} \right] dx' dy' \quad (5.13)$$

$$z, z' \quad l_2 = r_1 = \frac{c}{2} C_L^{(2)} \quad (5.14)$$

$$l_3 = r_2 - \frac{c G'}{4\pi x_m} r_1 - \frac{c G'}{2} \alpha_{i2} \quad (5.15)$$

$$\delta_3 = \pi m_1, \quad m_1 = \int_{\frac{c}{2}}^{\infty} X \Gamma_1 dx \quad (5.16)$$

$$r_{d3}' = -\frac{c G'}{2} \frac{\partial W_2}{\partial x} = \frac{c G'}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-1}^1 \frac{r_1}{y-y'} \left[ 1 + \frac{\{x^2 + (y-y')^2\}^{1/2}}{x} \right] dy \quad (5.18)$$

$l_2, l_3$  は閉曲線  $C$  (図 2 参) 内の循環である。

又  $x_m$  は共通領域内のある一点である。

$W$  と  $w$  の解がその共通領域で完全にマッチしている事は、

(5.3) 式と (5.8) 式と  $x \rightarrow \infty$  並びに  $x \rightarrow 0$  のリミットで評

値し、一項目づつ比較すれば、簡単に確認出来る。尚式(5.13)が外部領域でのジェット・シートによる影響を表わしており、(5.18)式を見れば、これが(5.10)式から求まり、従、この前の物理考察の章で述べた様に、内部領域での特異性の強さ(この場合は循環の渦糸)によ、決ま、くるものである事に注意して頂きたい。

以上の結果を用いれば、翼に効く揚力並びに誘導抵抗は翼の形状と与えさえすれば簡単に求める事が出来る。前述の様、循環の強さを求めるには大きな閉曲線 $C_2$ (図2参照)を用いなければならぬ。この $C_2$ 内の循環を今 $L$ とすると、

$$L = \frac{\Gamma}{4} + \frac{1}{4} (\Gamma_2 - c_j \alpha_{12}) + \dots \quad (5.19)$$

三次元翼では、ジェットは無限遠で $\alpha_{12}$ の角度傾いておりこの影響を考慮して(5.19)から揚力を求めると

$$C_L = \frac{1}{2} \int_1^1 \Gamma_1 dy + \frac{1}{2A} \int_2^1 \Gamma_2 dy + \dots \quad (5.20)$$

(5.20)式は、 $O(1/4)$ までの揚力は、内部領域に生じる特異性の強さ(この場合は渦糸でおまかえ<sup>り</sup>るが)しか三次元翼の揚力には寄与しないという大変重要な結果を示している。即ちジェット・シートが<sup>(無限遠まで)</sup>傾く為<sup>に</sup>生じる三次元翼でのプラスの揚力成分は、実はこのシートの曲率が減る為のマイナスの部分と打ち消し合っている事が解る。

本論文では、翼型としてリプン型の翼、放物型翼、楕円形



翼, 更に短形翼について揚力並びに誘導抵抗を求めた。

最初にも述べた様に, 翼端部では翼の下面から上面に巻き上がる様層捲れが生じ(谷 1967, 85ページ), この漸近解の内部解の基礎となっている二次元性が成り立たない領域が常に存在する。勿論この領域の広がり具合は翼の形状, アスペクト比に依存するか, 充分にスルー・スパン翼であれば(例えば前述1に最初の三つの翼), アスペクト比  $A$  が充分大きければ, 翼端部から充分に狭い領域に限定され, 揚力等翼全体にかかる力の積分値に因りては, その影響は無視してよい。しかしこの影響は短形翼の場合無視出来ず, 事実その積分値は無意味な値しか与えない。しかしながら, 揚力の計算には, エット・フラップが無い場合に, 揚力線理論に基づき Stewartson (1960) を求めた短形翼の解がそのままこの問題でも使える事は, (5.20) 式の各式と吟味すれば明らかであろう。例えば, 楕円翼並びに短形翼の場合の揚力係数並びに誘導抵抗係数は次の如くなる。

楕円翼.

$$\frac{C_L}{C_L^{(2)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi A} \frac{\partial C_L^{(2)}}{\partial \alpha}}, \quad \frac{C_D}{C_L^{(2)}} = \frac{1}{(\pi A)^2} \frac{1}{\frac{1}{\pi A} + \frac{1}{\pi A^2} (2C_D' + 2 \frac{\partial C_L^{(2)}}{\partial \alpha})} \quad (5.21)$$

短形翼.

$$\frac{C_L}{C_L^{(2)}} = \frac{1}{1 + \frac{\partial C_L^{(2)}}{\partial \alpha} \frac{1}{4\pi A} \left\{ \log \left( \frac{8A}{\frac{\partial C_L^{(2)}}{\partial \alpha}} \right) + 1 + \gamma \right\}}, \quad \frac{C_D}{C_L^{(2)}} = \frac{1}{4\pi A} \left\{ \log \left( \frac{8A}{\frac{\partial C_L^{(2)}}{\partial \alpha}} \right) + \alpha \right\} \quad (5.22)$$

こゝで  $C_{D_i}$  は誘導抵抗係数である。

William & Alexander (1957) は、この短形翼について数多くの実験を行つた。このほか、Stewartson (1960) の解に基づく (5.22) 式は、 $Pr$  や  $Gr$  が  $2.7$ ,  $Gr$  が  $4$  位まで、彼等の実験と非常に良く一致しており、Spence の二次元の理論と同様この三次元の理論も信頼性のある結果が求まり、このように思われる。

尚本論文のもと、と詳細な計算結果更には実験との比較は、著者の論文徳田 (1977) に述べてあるのでこゝでは省略する。興味のある方は、さうさ御参照願つたい。こゝでは、§3 で述べた様な簡単な物理解釈が、数学的にも複雑な問題も如何に簡潔化し、簡単な解が求められるかという事に重点をおいて、三次元・エント・フリップ理論の説明を試みた。

この研究は著者がケンブリッジ大学に滞在中完成したもので、その間著者と色々と励まして頂いた Lighthill 教授に感謝の意を表した。帰国以来、著者に色々と便覧と計つて頂いた今井功教授、阿段三郎教授にも謝意を表した。

### 参考文献

今井功, 1970. 流体力学. 岩波全書.

Das, A. 1965. Sonderdruck. Abhandl. Braunschweig. Wiss. Gesell.

17, 21-48.

Kerney, K.P. 1971 AIAA Journal, 9, 3, 431-435

Maskeil, E.C. & Spence, D.A. 1959 Proc. Roy. Soc. A. A.251, 407-425

Spence, D.A. 1956. Proc. Roy. Soc. A.238, 46-68

Spence, D.A. 1961 Proc. Roy. Soc. A.261, 97-118

谷一郎 1967 流体力学 岩波全書

Tokuda, N. 1971 J. Fluid Mech. 46 705-726

Stewartson, K. 1960 Quant. J. Mech. Appl. Math. 13, 49-56

Williams, J & Alexander, A.J. 1957. Aero. Quant. 9, 395-406.